Journées galoisiennes d'hiver

Jeunes talents en arithmétique

Orateurs invités

Antonin Assoun
Université de Lille
Angelot Behajaina
Université de Lille
Elyes Boughattas
Université de Bath
Tijs Buggenhout
Université de Leuven
Benjamin Collas
RIMS Kyoto

Azur Donlagic
Université Paris-Saclay
Felipe Gambardella
École polytechnique
Yotam Hendel
Université du Néguev
Manh Linh Nguyen
Sorbonne Université
Béranger Seguin
Université de Paderborn

Caen — 16 & 17 décembre 2024

LMNO
Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme
Caen — Normandie

Normandie - Mathématiques

Arithmetic & Homotopic Galois Theory
A France-Japan InternationalResearch Network

Contact : bruno.deschamps@univ-lemans.fr

Programme de la conférence

Lundi *16 décembre*

11 :20-12 :15
Azur Donlagic
The Use of Arithmetic Duality in Brauer-Manin Obstructions

12 :15-14 :00
Déjeuner

14 :00-14 :55
Manh Linh Nguyen
L'obstruction de Brauer–Manin et la méthode de la descente.

14 :55-15 :50
Felipe Gambardella
A weak Chebotarev theorem over geometric global fields

15 :50-16 :10
Pause café

16 :10-17 :05
Béranger Seguin
Dénombrement des extensions d'une algèbre centrale simple sur un corps de nombres

17 :05-18 :00
Antonin Assoun
Problème de Galois inverse régulier sur des tours de fractions tordues

20 :00
Diner

Mardi *17 décembre*

9 :00-9 :55
Benjamin Collas (*)
Une nouvelle géométrie des monoïdes - arithmétique anabélienne

9 :55-10 :15
Pause café

10 :15-11 :10
Elyes Boughattas
Unirationalité et R-équivalence des fibrés en coniques sur un corps quasi-fini

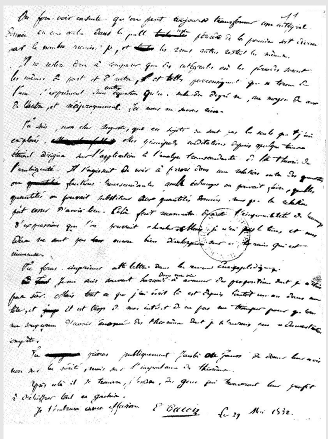
11 :10-12 :05
Angelot Behajaina
Sur la réductibilité des fibres de polynômes

12 :05-13 :50
Déjeuner

13 :50-14 :45
Tijs Buggenhout
Geometric Dimension Growth

14 :45-15 :05
Pause café

15 :05-16 :00
Yotam Hendel (*)
On uniform dimension growth bounds for rational points on algebraic varieties



(*) En visioconférence.

Résumés des exposés

Antonin Assoun — *Problème de Galois inverse régulier sur des tours de fractions tordues.*

Des travaux récents de Behajaina, Deschamps et Legrand montrent que l'extension du problème inverse de Galois à des corps de fractions tordus dont le centre n'est pas contenu dans le corps des constante a une réponse positive dès lors que le centre du corps des constantes contient un corps ample. Dans cet exposé nous énoncerons brièvement la manière dont la théorie de Galois s'étend aux corps gauches et proposerons une version du problème de Galois inverse régulier pour tout corps. Nous expliquerons ensuite pourquoi les travaux cités ci-dessus permettent de montrer que ce problème de Galois inverse régulier admet une réponse positive pour les corps qui y sont considérés. Dans une dernière partie nous introduirons des corps qui s'obtiennent comme limite inductive de corps du type considéré précédemment et nous verrons qu'ils satisfont également notre version de la propriété de Galois inverse régulière.

Angelot Behajaina — *Sur la réductibilité des fibres de polynômes.*

Étant donné un polynôme $f \in \mathbb{Q}[x]$, par le théorème d'irréductibilité de Hilbert, l'ensemble des $a \in \mathbb{Q}$ tel que la fibre $f^{-1}(a)$ est réductible est « mince ». Dans cet exposé, nous discutons des progrès récents concernant les deux problèmes étroitement liés suivants qui remontent au moins aux années 50.

Problème 1. Étant donné un polynôme $f \in \mathbb{Q}[x]$, déterminer l'ensemble de tous les entiers $a \in \mathbb{Z}$ tel que $f^{-1}(a)$ est réductible sur $\mathbb{Q}$.

Problème 2. (Problème de Davenport-Lewis-Schinzel) Pour quels polynômes $f, g \in \mathbb{C}[x] \setminus \mathbb{C}$, le polynôme $f(x) - g(y) \in \mathbb{C}[x, y]$ est-il réductible ?

En fait, ces deux problèmes sont résolus à moins que f se factorise par un polynôme indécomposable de petit degré. Cela repose sur un travail commun avec Joachim König et Danny Neftin.

Elyes Boughattas — *Unirationalité et R-équivalence des fibrés en coniques sur un corps quasi-fini.*

Lorsque k est un corps fini, Yanchevskii interroge l'unirationalité de X lorsque $f : X \longmapsto \mathbb{P}^1_k$ est un fibré en coniques. Un résultat de Mestre apporte une réponse positive lorsque le cardinal de k est grand par rapport au degré du lieu des « mauvaises fibres » de f. Je présenterai une réponse positive à la question de Yanchevskii lorsque les « mauvaises fibres » de f vivent au-dessus de points rationnels de $\mathbb{P}^1_k$. En prime, et sous les mêmes conditions, la méthode que nous utilisons implique que X admet une unique classe de R-équivalence. Ces résultats valent plus généralement sur des corps quasi-finis.

Tijs Buggenhout — *Geometric Dimension Growth.*

The original problem of (uniform) dimension growth, as raised by Serre and Heath-Brown, is to find an upper bound for the number of rational points of bounded height on an irreducible projective variety X over $\mathbb{Q}$, in terms of only the dimension and degree of X, the dimension of the ambient space, and the height. Recently, this problem was almost completely solved by works of Browning, Heath-Brown and Salberger, with further improvements given by Binyamini, Castryck, Cluckers, Dèbes, Dittmann, Hendel, Nguyen, Novikov and Vermeulen, among others. In joint work in progress, together with Yotam Hendel and Floris Vermeulen, we explore a geometric analogue of dimension growth, where we consider $\mathbb{C}(t)$-rational points of bounded degree on varieties defined over $\mathbb{C}(t)$. The $\mathbb{C}(t)$-points of bounded degree form a variety over $\mathbb{C}$ in a natural way, and we provide an upper bound for the dimension of such a variety under suitable conditions.

Benjamin Collas — *Une nouvelle géométrie des monoïdes - arithmétique anabélienne.*

La reconstruction de la structure schématique de variétés à partir du groupe fondamental étale illustre l'universalité géométrique de l'arithmétique anabélienne. Le programme de reconstruction canonique de l'école japonaise résulte, par ailleurs, en une certaine géométrie des monoïdes qui dépasse le modèle d'algèbre commutative de la géométrie grothendieckienne. Nous présenterons les principes fondamentaux de cette géométrie, due à Mochizuki Shinichi et Hoshi Yuichiro, à partir des exemples galoisiens des corps p-adiques et géométriques des courbes elliptiques, où s'entremêlent indéterminées, structure arithmétique holomorphique et objets de types Frobenius ou étale.

Azur Donlagic — *The Use of Arithmetic Duality in Brauer-Manin Obstructions.*

Given a variety X over a global field k, a cohomological obstruction to the existence of k-points of X was formulated by Manin using the Brauer group of X. For many families of varieties, this obstruction can be shown to be the only obstruction to the Hasse principle : When a variety X in this family possesses an adelic point which is trivial with respect to the Brauer-Manin pairing, then X has a k-point. Moreover, this adelic point can then often be suitably approximated by k-points. In this lecture, we briefly recall the local and global Tate duality theorems for finite group schemes over k, as well as their significant generalization by Rosengarten. Then we introduce the Brauer-Manin obstructions for a homogeneous space X of a commutative affine algebraic group G over k, and discuss how the duality theorems can be used to prove that the Brauer-Manin obstruction is the only one to the Hasse principle and weak/strong approximation of adelic points on X. This talk is based on the speaker's recent preprint dealing with the case when k is of positive characteristic.

Felipe Gambardella — *A weak Chebotarev theorem over geometric global fields.*

In recent years the arithmetic of more exotic fields than global fields has gained interest. For example, functions fields of curves defined over characteristic zero *quasi-finite* fields. We refer to such fields as *geometric global fields*. Many tools from number fields can be generalised to geometric global fields, but certainly not all of them.

In this talk we focus on the failure of Chebotarev's density theorem over geometric global fields. We explain a recurrence result that can be interpreted as a weak version of Chebotarev's density theorem over geometric global fields and we give an application of this result to very weak approximation of certain homogeneous spaces of SL_n.

Yotam Hendel — *On uniform dimension growth bounds for rational points on algebraic varieties.*

Let X be an integral projective variety defined over $\mathbb{Q}$ of degree at least 2 and $B > 0$ an integer. The (uniform) dimension growth conjecture, now proven in almost all cases following works of Browning, Heath-Brown and Salberger, provides a uniform upper bound on the number of rational points of height at most B lying on X, which depends only on the degree of X, the dimension of its ambient space, and on B.

In this talk, I will report on current developments which go beyond the classical uniform dimension growth bounds, focusing on an affine variant (which implies the projective one).

This is based on joint work with Cluckers, Dèbes, Nguyen and Vermeulen.

Manh Linh Nguyen — *L'obstruction de Brauer-Manin et la méthode de la descente.*

Soit X une variété algébrique définie sur un corps de nombres k. Une question fondamentale en géométrie arithmétique est de décider si X possède un point k-rationnel. Une condition nécessaire évidente est que X ait des points locaux dans tous les complétés k_v de k, mais cela n'est pas toujours suffisant (dans ce cas, on dit que X est un contre-exemple au principe de Hasse). Nous introduisons dans cet exposé une obstruction cohomologique définie par Manin permettant de détecter le défaut du principe de Hasse, ainsi qu'une propriété appelée « approximation faible ». Nous présentons ensuite la théorie de la descente, une méthode due à Colliot-Thélène et Sansuc. L'esprit de cette dernière est englobée dans une « conjecture de descente », qui a été récemment formulée par Wittenberg. Nous discuterons les cas connus de cette conjecture-là, à savoir ceux des torseurs sous un tore, un groupe fini hyper-résoluble (Harpaz-Wittenberg, 2020 et 2022) ou un groupe linéaire connexe (L, 2023).

Béranger Seguin — *Dénombrement des extensions d'une algèbre centrale simple sur un corps de nombres.*

Cet exposé présente des résultats au sujet de la densité asymptotique des discriminants des extensions (intérieures comme extérieures) d'une algèbre centrale simple sur un corps de nombres. Ce projet généralise la question de la distribution des corps de nombres au cas des algèbres simples (ou des corps non-commutatifs).

Les travaux présentés sont le fruit d'une collaboration avec Fabian Gundlach.